FUNCIÓN CUADRÁTICA

Llamamos función cuadrática a toda función de la forma $f(x) = ax^2 + bx + c$ donde a, b y $c \in \mathbb{R}$, y $a \neq 0$. Esta expresión es la forma polinómica de la función cuadrática. La variable independiente debe estar elevada al cuadrado.

Los términos de esta expresión se denominan: $f(x) = \underbrace{ax^2}_{\text{Término Cuadrático}} + \underbrace{bx}_{\text{Término lineal}} + \underbrace{c}_{\text{Término independiente}}$

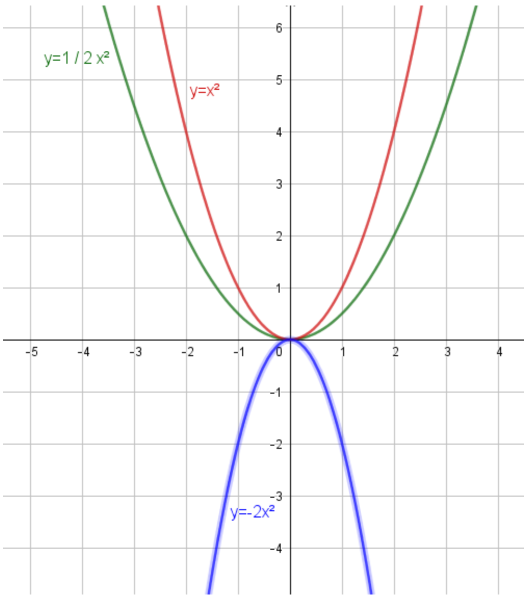
Coeficientes
- a ⟹ Coeficiente cuadrático
- b ⟹ Coeficiente lineal
- c ⟹ Coeficiente independiente

Nota: Diferenciar el término del coeficiente.

La **representación gráfica** de una función cuadrática es una **parábola.**

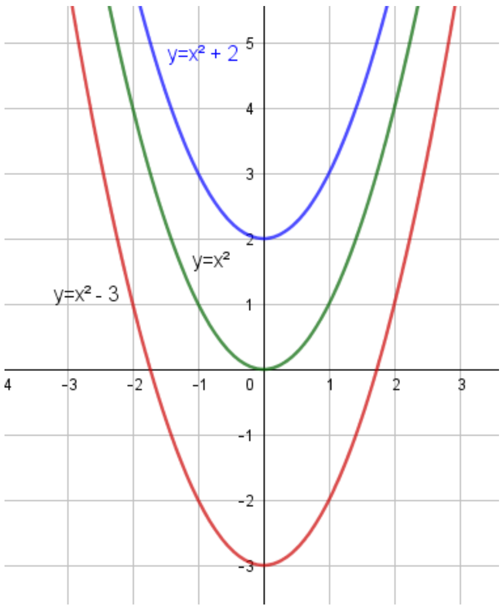
La función cuadrática puede ser **completa** o **incompleta.** Veamos la gráfica de las funciones incompletas.

1) **Funciones de la forma:** $\boldsymbol{y = ax^2}$



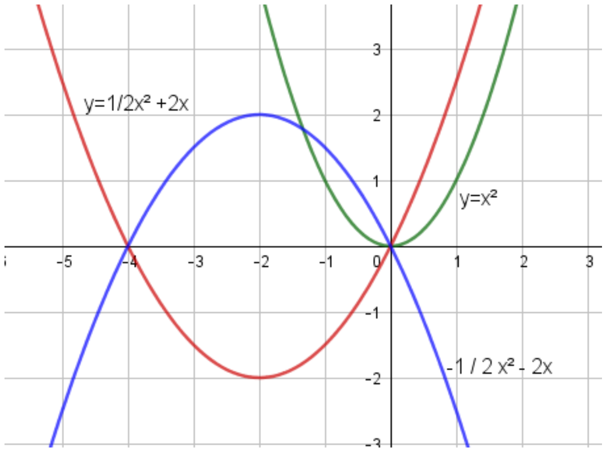
a>0	La parábola "va" hacia **arriba**
a<0	La parábola "va" hacia **abajo**
$\boldsymbol{0 < \lvert a \rvert < 1}$	La parábola se **abre**
$\boldsymbol{\lvert a \rvert > 1}$	La parábola se **cierra**

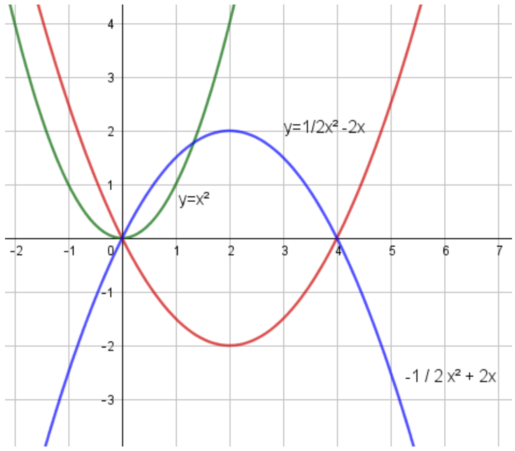
2) Funciones de la forma: $y = ax^2 + c$



$\boldsymbol{c > 0}$	La gráfica se desplaza hacia **arriba**
$\boldsymbol{c < 0}$	La gráfica se desplaza hacia **abajo**

2) F unciones de la forma $\boldsymbol{y = ax^2 + bx}$



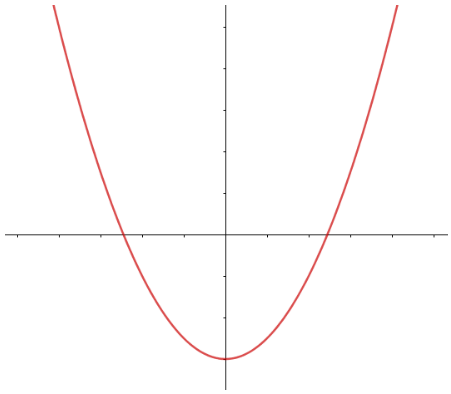


Si **a** y **b** tienen el mismo signo, la gráfica se desplaza hacia la **izquierda.**

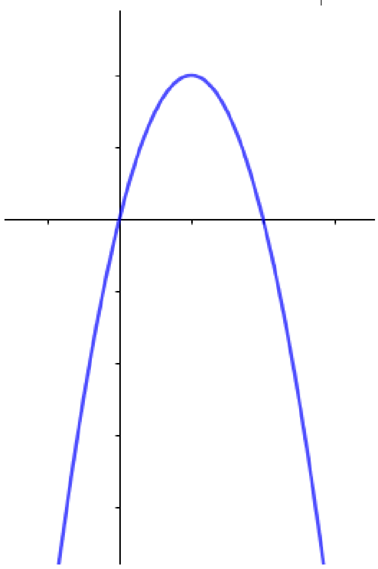
Si **a** y **b** tienen distinto signo, la gráfica se Desplaza hacia la **derecha.**

TRABAJO PRÁCTICO Nº3

1) Marquen con una X la fórmula que corresponde en cada gráfico



	$y = -\frac{1}{2}x^2 + 3$
	$y = -\frac{1}{2}x^2 - 3$
	$y = \frac{1}{2}x^2 + 3$
	$y = \frac{1}{2}x^2 - 3$



	$y = 2x^2 + 4x$
	$y = 2x^2 - 4x$
	$y = -2x^2 + 4x$
	$y = -2x^2 - 4x$

2) Escriban V (verdadero) o F (falso) según corresponda. Corregir los falsos para que resulten verdaderos

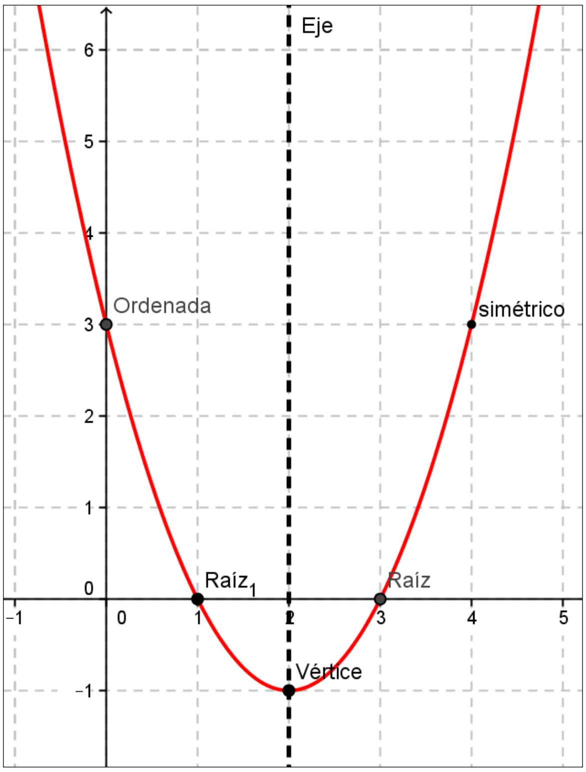
a) La gráfica de $f(x) = x^2 + n$ $(n > 0)$ es la gráfica de $f(x) = x^2$ desplazada hacia arriba

b) La gráfica de $f(x) = x^2 - rx$ $(r > 0)$ es la gráfica de $f(x) = x^2$ desplazada hacia la izq,

c) La gráfica de $f(x) = x^2 - m$ $(m < 0)$ es la gráfica de $f(x) = x^2$ desplazada hacia abajo

d) La gráfica de $f(x) = x^2 - tx$ $(t < 0)$ es la gráfica de $f(x) = x^2$ desplazada hacia la izq,

Características de la Parábola



Esta parábola representa a la función $f(x) = x^2 - 4x + 3$

Las parábolas son curvas simétricas, respecto de una recta imaginaria perpendicular al eje x, llamada **Eje de simetría**, que pasa por la abscisa del vértice.

El ***vértice***, también llamado extremo de la función. Si las ramas van hacia arriba, se trata de un **máximo**; de lo contrario es un **mínimo.**

La intersección de la curva con el eje de ordenadas (o sea el eje y) se llama **ordenada al origen** y siempre coincide con el término independiente, o sea $f(0) = c$.

La intersección de la curva con el eje x se llama **raíz**. Puede tener una, dos o ninguna.

Todo punto de la curva, con excepción del vértice, tiene un punto simétrico. Es decir, los puntos simétricos entre sí, se encuentran a igual distancia del eje de simetría. En el gráfico, está indicado el punto simétrico de la ordenada al origen, pero también puede observarse que las raíces son simétricas también. Las funciones cuadráticas presentan un tramo en el que son **crecientes** y otro en el que **decrecen**. El valor del dominio, donde se produce el cambio entre el crecimiento y decrecimiento, es la abscisa del vértice. En cambio, las raíces, si existen, determinan el pasaje del conjunto de positividad al de negatividad o viceversa.

Construcción del gráfico de la función cuadrática. Para graficar una función aprovecharemos las características particulares de la parábola:

- ***Vértice***: El vértice es un punto que pertenece a la parábola, como tal, posee dos coordenadas $(x_v; y_v)$, siendo x_v: $la\ abscisa\ del\ vértice\ \ e\ \ y_v: la\ ordenada\ del\ vértice$

    - Para hallar la abscisa del vértice: $x_v = \frac{-b}{2a}$

    - Para hallar la ordenada del vértice, utilizamos una de estas dos fórmulas:

$$y_v = f(x_v) \qquad o \qquad y_v = -\frac{b^2}{4a} + c$$

- ***Ecuación del eje de simetría:*** El eje de simetría es una recta, por lo tanto se expresa a través de una ecuación, y como ya se dijo, atraviesa la parábola por la abscisa del vértice, en consecuencia, la ecuación del eje de simetría coincide con esta abscisa.

$$x = x_v$$

- ***Ordenada al origen:*** siempre es el punto $(0; c)$. En el caso que se trate de una fórmula incompleta, c = 0
- ***Raíces o Ceros***: Las raíces de una función se obtienen igualando a cero dicha función; de esta manera se transforma en una ecuación, pero, como no puede aplicarse el pasaje de términos, es necesario aplicar una fórmula llamada **resolvente**, y en ella intervienen únicamente los coeficientes.

$$ax^2 + bx + c = 0$$

$$\boldsymbol{x_{1;2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}}$$

Ejemplo a desarrollar en clase: $f(x) = x^2 - 4x + 3$

ECUACIONES CUADRÁTICAS

Las ecuaciones, se trabajan algebraicamente, hasta que se llega a la expresión más reducida e igualada a cero. Luego se resuelven de la misma manera que se calculan los ceros (o raíces) en la función; según sean completas o incompletas.
Veamos ejemplos para cuando son incompletas (b o c son nulos)
Si $\boldsymbol{f(x) = ax^2 + bx}$, se hallan sus raíces resolviendo la ecuación $ax^2 + bx = 0$.
Si $f(x) = 3x^2 + 5x$, entonces $3x^2 + 5x = 0$ se puede resolver así: Se saca factor común:
$\mathrm{x.}\,(3\mathrm{x} + 5) = 0$ El producto es nulo si alguno de los factores lo es, uno o ambos, entonces las raíces son $x_1 = 0\ y\ x_2 = -\frac{5}{3}$.
Si $\boldsymbol{f(x) = ax^2 - c,}$ se hallan sus raíces resolviendo la ecuación $ax^2 - c = 0$
Si $f(x) = x^2 - 1$, entonces se resuelve $x^2 - 1 = 0 \quad \rightarrow \quad x^2 = 1 \quad \rightarrow \quad |x| = \sqrt{1}$
Entonces resulta que las raíces son $x_1 = 1\ y\ x_2 = -1$
Si la ecuación es completa se resuelve aplicando la fórmula resolvente.

3) Graficar. Calcular vértice, raíces e indicar eje de simetría y ordenada al origen:

$a)\ f(x) = -x^2 + 12x - 36$ $\quad d)\ f(x) = -x^2 + 3x$ $\quad g)\ f(x) = 2x^2 + 4x - \frac{5}{2}$ $\quad j)\ f(x) = -\frac{1}{4}x^2$

$b)\ f(x) = 5x^2 - 10x + 1$ $\quad e)\ f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{2}$ $\quad h)\ f(x) = x^2 - 4x + 4$ $\quad k)\ f(x) = x^2 - 5x + 8$

$c)\ f(x) = 4x^2 - 1$ $\quad f)\ f(x) = x^2 + x + 1$ $\quad i)\ f(x) = -x^2 + 4x$ $\quad l)\ f(x) = -x^2 + 2x + 3$

4) Dada la función $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \,/\, f(x) = 3x^2 + 1$

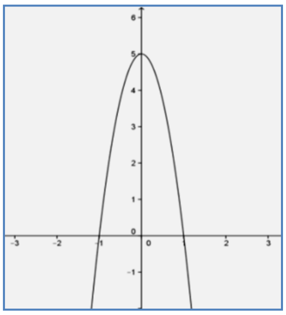
a) Calcular $f(-3)$, $f(\sqrt{6})\ y\ f(4^{-1})$

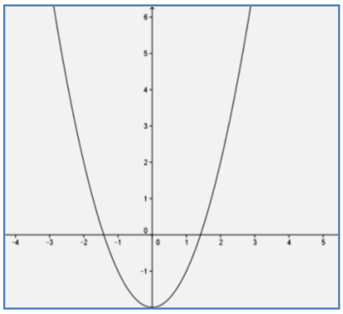
b) Indicar, de ser posible, los valores de x para los cuales se verifique: $f(x) = 0, f(x) = 48$

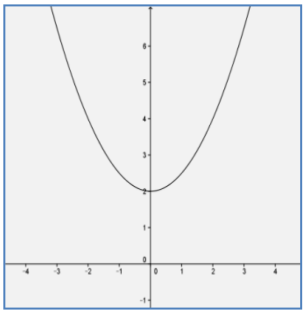
$$f(x) = -2 \quad y \quad f(x) = f(2)$$

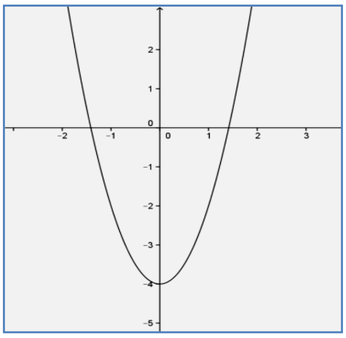
5) Relacionar cada gráfico con la fórmula correspondiente.

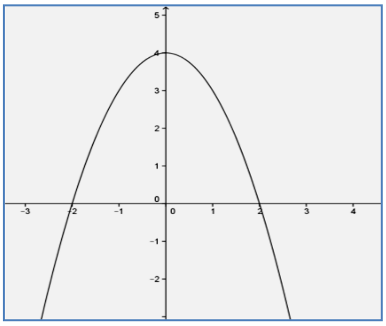
$a)\ y = \frac{1}{2}x^2 + 2 \quad b)\ y = 2x^2 - 4 \quad c)\ y = -x^2 + 4 \quad d)\ y = -5x^2 + 5 \quad e)\ y = x^2 - 2$

I) 

II) 

III) 

IV) 

V) 

6) Encuentra analíticamente:

a) El valor de ***b*** para que la función $f(x) = -\frac{1}{3}x^2 + bx - 4$ pase por el punto $Q = (3; 5)$

b) Los valores de ***b*** y ***c*** para los cuales los puntos (1; 0) y (-1; 6) pertenezcan a la gráfica de $f(x) = x^2 - bx + c$

c) El valor de ***b*** para que la parábola $y = x^2 + bx + 3$ tenga el vértice en el punto (2; -1)

d) Determinar el valor de ***a*** para que la función $y = ax^2 + 2x - 3$ tenga la abscisa del vértice igual a 2.

7) Un grupo de biólogos estudia las características de un lago artificial en el cual introdujeron un conjunto de peces para analizar su evolución. En un principio, la colonia crece reproduciéndose normalmente, pero al cabo de unos meses algunos peces mueren, a causa del hacinamiento. Los registros indican que el conjunto de peces evoluciona según la ley $n(x) = 240 + 10x - 0{,}1x^2$, donde ***x*** representa los días que han transcurrido y ***n*** la cantidad de peces. Con esta proyección pronto se extinguirán.

Sobre la base de la función dada por ese científico, responder:

a) ¿Cuántos peces introdujeron en el lago?

b) ¿Durante cuánto tiempo la cantidad de peces fue aumentando?

c) ¿Cuál fue la cantidad máxima de peces que hubo en el lago? ¿En qué momento se produjo tal situación?

d) ¿Luego de cuánto tiempo se extinguiría la población?

8) Se lanza un proyectil que describe una trayectoria parabólica de ecuación $y = x - \frac{1}{400}x^2$

a) ¿A qué distancia del punto de salida impacta el proyectil?

b) Determinar las coordenadas de la máxima altura alcanzada por él.

9) La velocidad (V) de un misil (medida en metros por segundo) en función del tiempo (t), está dada por la función $V(t) = 54t - 2t^2 + 10$

a) ¿cuál es la velocidad máxima que alcanza el misil?

b) ¿en qué momento alcanza dicha velocidad?

c) ¿luego de cuánto tiempo se detiene el misil?

d) ¿En qué momento la velocidad será de 350 m/s? ¿y de 400 m/s?

10) Completar las siguientes proposiciones respecto de la gráfica de f(x)=ax^2 + bx + c; escribiendo las condiciones sobre los coeficientes a, b y c.

a) El vértice es un mínimo, entonces...

b) El eje de simetría es x = 0; luego..

c) Interseca al eje "y" en 3, luego...

d) El vértice es el punto (0,0); luego...

e) Corta al eje "x" en dos puntos, luego..

f) No tiene su vértice sobre el eje "y"; luego...

11) Resolver las siguientes ecuaciones:

$a)\ \dfrac{x+3}{3} = \dfrac{4}{4-x}$ $\qquad b)\ (x+6)(x-6) = 133$ $\qquad c)\ 3(x^2-1) - 2(x^2+2) = 18$

$d)\ \dfrac{10x^2 - 2x}{3x+1} = 3x - 1$ $\qquad e)\ 2x^2 + 2 = 0$ $\qquad f)\ 2x^2 = 12x$

$g)\ 18x(0{,}25x - 5) = 0$ $\qquad h)\ 5(1-x)^2 = -10(x+1)$ $\qquad i)\ (x-2)^2 + (x-3)^2 = 181$

$j)\ \dfrac{2(x^2-3)}{4} - \dfrac{x^2+3}{2} = x + \dfrac{x^2}{2}$ $\qquad k)\ \sqrt{16x - \dfrac{2}{x}} = 2$ $\qquad l)\ (x-1)^2 + (x-2)^2 + 12x - 3x^2 = -11$

$m)\ (x-\sqrt{2})(x+\sqrt{2})\dfrac{1}{\sqrt{3}} = \sqrt{12}$ $\qquad n)\ \dfrac{5x+1}{3x+2} = \dfrac{7}{x+4}$ $\qquad o)\ (4x+2)(x+1) = (2x+3)x + 2(x+1)$

$q)\ \dfrac{2(x-3)}{x} = \dfrac{5x-2}{x+2}$ $\qquad r)\ \dfrac{3x^2}{2} - \dfrac{2x}{3} = \dfrac{x}{6} + \dfrac{5}{4}x^2$ $\qquad s)\ \dfrac{(x+1)(3x+4) - 2x^2}{4x} = -\dfrac{4}{3}$

Clave de respuestas

Ej. 4)	a) 28	19	7/4		
	b) $\nexists x \in \mathbb{R}$	$\pm\dfrac{\sqrt{141}}{3}$	$\nexists x \in \mathbb{R}$	± 2	
Ej. 5)	a) III	b) IV	c) V	d) I	e) II
Ej. 6)	a) b=4	b) b=3 c=2	c) b=-4	d) a=-1/2	
Ej. 7)	a) 240	b) 50	c) 490-50	d) 120	
Ej. 11)	a) $S = \{0,1\}$	b) $S = \{-13,13\}$	c) $S = \{5,-5\}$	d) $S = \{1\}$	e) $\nexists x \in \mathbb{R}$
	f) $S = \{0,6\}$	g) $S = \{0,20\}$	h) $\nexists x \in \mathbb{R}$	i) $S = \{-7,12\}$	j) S={-1}
	k) S= $\left\{-\frac{1}{4};\frac{1}{2}\right\}$	l) S={-2;8}	m) S=$\{-2\sqrt{2}; 2\sqrt{2}\}$	n) S=$\{-\sqrt{2}; \sqrt{2}\}$	o)S= $\left\{-\frac{1}{2}; 0\right\}$